QUADERNI DEL DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELL'ECONOMIA

UNIVERSITÀ DEL SALENTO

ASIMMETRIA INFORMATIVA IN UN MERCATO CON n+1 MOTI BROWNIANI

Donato Scolozzi
Luigi Romano

Numero MS/2
Dicembre 2013

DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELL'ECONOMIA
FACOLTÀ DI ECONOMIA
UNIVERSITÀ DEL SALENTO - LECCE
ISSN 2284-0818

Quaderni del Dipartimento di Scienze dell'Economia

I Quaderni intendono favorire la circolazione di studi in versione preliminare, al fine di accelerarne la diffusione e per sollecitare suggerimenti e critiche.

Vengono considerati per la pubblicazione sui Quaderni del Dipartimento solo lavori non ancora pubblicati in versione definitiva su libri o su rivista. Possono proporre lavori per la pubblicazione membri del Dipartimento (anche in collaborazione con studiosi esterni) o studiosi che abbiano presentato il lavoro in oggetto nell'ambito di conferenze o seminari svolti nell'ambito delle attività dipartimentali.

I quaderni si articolano in quattro sezioni: Aziendale, Economica, Giuridica, Matematico Statistica.
I quaderni vengono regolarmente inviati a Istituti, Dipartimenti e Biblioteche a carattere economico e sono inclusi nella serie Research Papers in Economics (REPEC).

L'accesso ai Quaderni è approvato dal Coordinatore scientifico della sezione.

Coordinatori scientifici:

Sezione di economia aziendale (A): **Antonio Costa**
Sezione economica (E): **Giampaolo Arachi**
Sezione giuridica (G): **Franco Paparella**
Sezione Matematico-Statistica (MS): **Donato Posa**

Editore:

Dipartimento di Scienze dell'Economia
Indirizzo mail: direzione.dipeconomia@unisalento.it
Ecotekne - via Monteroni
73100 Lecce

Codice ISSN: 2284-0818

ASIMMETRIA INFORMATIVA IN UN MERCATO CON n+1 MOTI BROWNIANI[1]

Donato Scolozzi[2] - Luigi Romano[3]

Dipartimento di Scienze dell'Economia
Sezione matematematico-statistica
Universitá del Salento

Abstract

This paper covers asymmetric information in financial markets from a micro perspective. Particularly, we aim to extend the asset pricing framework introduced by Guasoni (2006), which models price dynamics with both a martingale component, described by permanent shocks, and a stationary component, given by temporary shocks. First, we derive a generalization of this asset pricing model using n Brownian motions, as well as include an Ornstein-Uhlenbeck process as the $(n+1)th$ element. We find non-Markovian dynamics for the uniformed agents, which questions the validity of the efficient market hypothesis. Moreover, we contrast the positions of informed and uninformed agents. Thereby, the filtration for informed agents is larger and initially specified, whereas the filtration for uniformed agents is smaller and obtained from the Hitsuda representation (1968). For both agents, our study yields similar results as the findings of Guasoni, for the logarithmic utility maximization problem.

Questo lavoro esamina l'asimmetria informativa nei mercati finanziari applicabile anche ad una micro prospettiva. In particolare, ci proponiamo di estendere il lavoro sull'asset pricing introdotto da Guasoni (2006), il quale analizza le dinamiche dei prezzi che presentano sia una componente martingala, descritta da shocks permanenti, e una componente stazionaria, descritta da shocks temporanei. Inizialmente, deriviamo una generalizzazione di questo modello sull'asset pricing, utilizzando n moti Browniani, prevedendo come $(n+1)th$ elemento un processo Ornstein-Uhlenbeck. Otteniamo una dinamica non Markoviana per gli agenti non informati, mettendo in tal modo in discussione la validitá delle ipotesi di mercato efficiente. Inoltre, confrontiamo le posizioni degli agenti informati con quellle degli agenti non informati. In questo quadro, la filtrazione per gli agenti informati é piú grande e inizialmente assegnata, mentre la filtrazione per gli agenti non informati é piú piccola e ottenuta attraverso la rappresentazione di Hitsuda (1968). Per entrambi gli agenti,nell'ambito del problema della massimizzazione dell'utilitá logaritmica, i nostri studi forniscono risultati simili a quelli ottenuti da Guasoni.

parole chiave: processi stocastici; rappresentazione di Hitsuda; asimmetria informativa

codici classificazione AMS: 60G15; 62M07; 45D05

[1] lavoro completato nel mese di ottobre 2013

[2] donato.scolozzi@unisalento.it

[3] luigi.romano@unisalento.it

1 Il modello

Consideriamo un mercato finanziario in cui sono presenti un titolo privo di rischio D ed un titolo rischioso S. Supponiamo deterministico il tasso di interesse di mercato. Per descrivere la dinamica del titolo rischioso consideriamo uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ su cui sono definiti $n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, moti browniani indipendenti:

$$\left(B_t^1\right)_{t\in[0,+\infty[}, \left(B_t^2\right)_{t\in[0,+\infty[}, \ldots \left(B_t^n\right)_{t\in[0,+\infty[}, \left(B_t^{n+1}\right)_{t\in[0,+\infty[}$$

Assegnato il parametro reale $\lambda_{n+1} > 0$, consideriamo il processo di Ornstein-Uhlenbeck $\left(U_t^{n+1}\right)_{t\in[0,+\infty)}$ definito dalla equazione:

$$U_t^{n+1} + \lambda_{n+1} \int_0^t U_s^{n+1} ds = B_t^{n+1}, \qquad t \in [0, +\infty[\tag{1}$$

che, come noto, é dato dalla relazione:

$$U_t^{n+1} = \int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_s^{n+1} \tag{2}$$

Assegnati poi i numeri reali p_j, con $j = 1, 2, ..., n, n+1$, $p_{n+1} > 0$ e i primi n non tutti nulli, consideriamo il processo $(Y_t)_{t\in[0,+\infty)}$ definito da:

$$Y_t = \sum_{j=1}^{n} p_j B_t^j + p_{n+1} U_t^{n+1}. \tag{3}$$

Consideriamo ora due funzioni deterministiche

$$\mu, \sigma : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

misurabili secondo Lebesgue e tali che

$$\forall\ T > 0 \qquad \mu \in L^1\left([0,T]\right), \quad \sigma \in L^2\left([0,T]\right)$$

Supponiamo che il prezzo del titolo rischioso sia regolato dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dY_t \tag{4}$$

la cui soluzione, come noto, é data dalla relazione:

$$S_t = S_0 \exp\left[\int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s dY_s\right]. \tag{5}$$

E' possibile ora interpretare la situazione ottenuta nel modo seguente: esiste un investitore che ha le informazioni che gli vengono da tutti i moti browniani e che chiameremo "investitore informato", e c'é l'investitore che invece fa

riferimento alle informazioni che gli vengono dal processo Y e che chiameremo "investitore parzialmente informato".

Il primo, quindi, fa riferimento alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^1\right)_{t\in[0,+\infty[}$ ottenuta completando la filtrazione naturale generata dagli $n+1$ moti browniani $B_t^1, B_t^2, ..., B_t^n, B_t^{n+1}$, che quindi soddisfa le usuali condizioni di completezza e di continuitá da destra.

Il secondo, invece, fa riferimento alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ generata dal processo Y_t.

Evidentemente risulta $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t^1$ per ogni t.

Volendo reinterpretare la situazione dell'agente informato, é possibile affermare che il valore del titolo rischioso evolve seguendo i moti browniani assegnati; il suo valore é quindi determinato dalla equazione:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu_t - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_t U_t^{n+1}\right) dt + \sigma_t \sum_{j=1}^{n+1} p_j dB_t^j \tag{6}$$

che fa riferimento al moto browniano

$$W_t = \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n+1} p_j B_t^j$$

e la cui soluzione, se $x > 0$ é la ricchezza iniziale, é data, come noto, dalla relazione:

$$S_t = xe^{\int_0^t \left[\left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\sigma_s^2\right] ds + \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma_s dW_s} \tag{7}$$

Ora, nel prossimo paragrafo, vogliamo individuare, per l'agente parzialmente informato, una analoga equazione che rappresenta Y, e quindi S, in termini della filtrazione $\mathcal{F}^0$ e di un opportuno moto browniano B^0.

2 Scomposizione del processo Y rispetto ad $\mathcal{F}^0$

In questo paragrafo esaminiamo la proprietá di markovianitá di Y e determiniamo, rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}^0$, il relativo moto browniano B^0 che lo rappresenta.

Theorem 2.1. *Y é gaussiano, ed inoltre:*

1. $E\left(Y_t\right) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$

2. $\Gamma(s,t) = cov\,(Y_s, Y_t) = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) t \wedge s + p_{n+1}^2 \frac{e^{-\lambda_{n+1}|t-s|} - e^{-\lambda_{n+1}(t+s)}}{2\lambda_{n+1}}$

Proof. 1. Le proprietá di gaussianitá e di media nulla sono ovvie. Inoltre:

2. $\Gamma(s,t) = cov\,(Y_s, Y_t) = E\,(Y_s Y_t) =$

$$E\left(\left[\sum_{j=1}^{n} p_j B_s^j + p_{n+1} U_s^{n+1}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} p_j B_t^j + p_{n+1} U_t^{n+1}\right]\right) =$$

per l'indipendenza dei moti browniani

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2 B_s^j B_t^j\right) + E\left(p_{n+1}^2 U_s^{n+1} U_t^{n+1}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^2 E\left(B_s^j B_t^j\right) + p_{n+1}^2 E\left(\int_0^s e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^{n+1} \int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-u)} dB_u^{n+1}\right) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) s \wedge t + p_{n+1}^2 \int_0^{s\wedge t} e^{-\lambda_{n+1}(t-u) - \lambda_{n+1}(s-u)} du =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) s \wedge t + p_{n+1}^2 e^{-\lambda_{n+1}(t+s)} \frac{e^{\lambda_{n+1}(s\wedge t)} - 1}{2\lambda_{n+1}} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) s \wedge t + p_{n+1}^2 \frac{e^{-\lambda_{n+1}|t-s|} - e^{-\lambda_{n+1}(t+s)}}{2\lambda_{n+1}}$$

□

Per verificare la proprietá di Markov del processo Y faremo riferimento al seguente risultato (vedi [D. Revuz - M. Yor], III.1.13)

Theorem 2.2. *Y é di Markov se e solo se risulta:*

$$\Gamma(s,t)\Gamma(t,u) = \Gamma(t,t)\Gamma(s,u) \quad \forall\ s \le t \le u$$

Theorem 2.3. *1. Se si ha $\lambda_{n+1} = 0$ allora Y é di Markov.*

2. Se si ha $\lambda_{n+1} > 0$ allora Y é di Markov se e solo se si verifica una delle due condizioni: $p_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, ..., n$ oppure $p_{n+1} = 0$

Proof. La proprietá 1 é ovvia. Inoltre é altrettanto ovvio che Y é di Markov se si ha $p_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, ..., n$ oppure se si ha $p_{n+1} = 0$.

Si abbia allora

$$\Gamma(s,t)\Gamma(t,u) = \Gamma(t,t)\Gamma(s,u) \quad \forall\ s \leq t \leq u$$

e si supponga anche $\sum_{j=1}^{n} p_j^2 > 0$.

Considerando il limite per $u \to +\infty$ si ottiene:

$$tp_{n+1}^2 \frac{e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} - e^{-\lambda_{n+1}(t+s)}}{2\lambda_{n+1}} = sp_{n+1}^2 \frac{1 - e^{-2\lambda_{n+1}t}}{2\lambda_{n+1}}$$

che si puó riscrivere nella forma:

$$p_{n+1}^2 \left[\frac{e^{\lambda_{n+1}s} - e^{-\lambda_{n+1}s}}{s} - \frac{e^{\lambda_{n+1}t} - e^{-\lambda_{n+1}t}}{t} \right] = 0 \quad \forall s \leq t$$

Da essa, passando al limite per $t \to +\infty$, si deduce la tesi, cioé $p_{n+1} = 0$. $\square$

Consideriamo ora il processo Z definito dalla relazione:

$$Z_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} p_j \left(B_t^j + \lambda_{n+1} \int_0^t B_u^j du \right) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} p_{n+1} B_t^{n+1}. \tag{8}$$

Esso verifica il seguente risultato:

Theorem 2.4. *1. Z_t é gaussiano*

2. $E(Z_t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$

3. $cov(Z_t, Z_s) = t \wedge s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2 \right) \int_0^t \int_0^s \left(\lambda_{n+1} + \lambda_{n+1}^2 u \wedge v \right) dudv$

Proof. Osserviamo che il processo Z puó essere riscritto nella forma seguente:

$$Z_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} p_j \left(B_t^j + \lambda_{n+1} \int_0^t (t-u)\, dB_u^j \right) + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} p_{n+1} B_t^{n+1} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} p_j \int_0^t \left[1 + \lambda_{n+1}(t-u) \right] dB_u^j + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} p_{n+1} B_t^{n+1}$$

Quindi la covarianza, per l'indipendenza dei moti browniani, é data da:

$$cov\left(Z_t, Z_s\right) = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 \int_0^{t\wedge s} \left[1+\lambda_{n+1}\left(t-u\right)\right]\left[1+\lambda_{n+1}\left(s-u\right)\right] du +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-1} p_{n+1}^2 \; t\wedge s$$

con calcoli standard si ottiene la relazione finale. □

Consideriamo ora la funzione

$$\tilde{f}\left(t,s\right) = -\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) \left(\lambda_{n+1} + \lambda_{n+1}^2 t\wedge s\right)$$

che é parte della covarianza del processo Z_t.

Per gli scopi successivi basta considerarla quando si ha $0 \leq s \leq t$, in tal caso la si puó riscrivere nella forma:

$$\tilde{f}\left(t,s\right) = -\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right) \left(\lambda_{n+1} + \lambda_{n+1}^2 s\right) \quad \forall\; 0 \leq s \leq t.$$

Posto, per semplificare le notazioni, $A^2 = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right)$ possiamo considerare il seguente risultato:

Theorem 2.5. *Considerata la precedente funzione $\tilde{f}\left(t,s\right)$, la funzione*

$$\tilde{g}\left(t,s\right) = \begin{cases} \lambda_{n+1}\eta(s) & se\; 0 \leq s \leq t \\ 0 & altrimenti \end{cases} \tag{9}$$

dove $\eta\left(s\right)$ verifica il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \eta'\left(s\right) = \lambda_{n+1}\left(\eta(s) - A^2\right) \\ \eta\left(0\right) = -A^2 \end{cases} \tag{10}$$

verifica l'equazione integrale di seguito riportata:

$$\tilde{f}\left(t,s\right) = \tilde{g}\left(t,s\right) - \int_0^s \tilde{g}\left(t,u\right)\tilde{g}\left(s,u\right) du \quad \forall\; 0 \leq s \leq t \tag{11}$$

Proof. La facile verifica si ottiene considerando l'equazione integrale nella forma:

$$-A^2\left(\lambda_{n+1}+\lambda_{n+1}^2 s\right)=\lambda_{n+1}\eta\left(s\right)-\lambda_{n+1}^2\int_0^s \eta^2\left(u\right)du \quad \forall\ 0\leq s\leq t$$

da cui si ottiene facilmente il problema di Cauchy.
La sua soluzione, come si verifica facilmente, é data dalla funzione:

$$\eta\left(s\right)=A\frac{1-A-\left(1+A\right)e^{2A\lambda_{n+1}s}}{1-A+\left(1+A\right)e^{2A\lambda_{n+1}s}}$$

□

Siamo ora in grado di enunciare il seguente risultato:

Theorem 2.6. *1. Esiste un moto browniano* $\left(B_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ *rispetto alla filtrazione* $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ *tale che si abbia:*

$$Z_t=B_t^0-\int_0^t\left(\int_0^s \tilde{g}\left(s,u\right)dB_u^0\right)ds=B_t^0-\lambda_{n+1}\int_0^t\left(\int_0^s \eta\left(u\right)dB_u^0\right)ds$$

2. Considerata la funzione $g:[0,T]\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ *definita da:*

$$g\left(t,s\right)=-\lambda_{n+1}\eta(s)e^{\lambda_{n+1}\int_s^t\eta(u)du} \quad \textit{se si ha} \quad 0\leq s\leq t$$

e

$$g\left(t,s\right)=0 \qquad \textit{altrimenti,}$$

vale la relazione:

$$B_t^0=Z_t-\int_0^t\left(\int_0^s g\left(s,u\right)dZ_u\right)ds$$

Proof. 1. L'esistenza del moto browniano B_t^0 é conseguenza del fatto che la funzione $\tilde{g}\left(t,s\right)$ verifica l'equazione integrale:

$$\tilde{f}\left(t,s\right)=\tilde{g}\left(t,s\right)-\int_0^s \tilde{g}\left(t,u\right)\tilde{g}\left(s,u\right)du \quad \forall\ 0\leq s\leq t$$

e dalla proposizione 2 di Hitsuda [Hit68].

2. Per verificare la relazione

$$B_t^0 = Z_t - \int_0^t \left(\int_0^s g(s,u)\, dZ_u \right) ds$$

basta utilizzare i teoremi 1' e 2' di Hitsuda [Hit68] (o il teorema 2 in Cheridito [Che03]), oppure il lemma A.2 di in Guasoni [Gua06]. La funzione $g(t,s)$ é quella indicata nell'enunciato ed é detta "il risolvente negativo" di $\tilde{g}(t,s)$

□

Theorem 2.7. *I processi Y e Z verificano la seguente relazione:*

$$Y_t + \lambda_{n+1} \int_0^t Y_u du = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} Z_t$$

Quindi risulta:

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-u)} dZ_u$$

Proof. Risulta:

$$Y_t - \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} Z_t = \sum_{j=1}^{n+1} p_j B_t^j + p_{n+1} U_t^{n+1} - \sum_{j=1}^{n+1} p_j \left(B_t^j + \lambda_{n+1} \int_0^t B_u^j du \right) - p_{n+1} B_t^{n+1} =$$

$$-\lambda_{n+1} \int_0^t \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j B_u^j + p_{n+1} U_u^{n+1} \right] du = -\lambda_{n+1} \int_0^t Y_u du$$

L'altra relazione si ottiene facilmente per integrazione. □

É possibile ora esprimere il legame tra processo Y_t ed il moto browniano B_t^0. In particolare abbiamo il seguente (fondamentale) risultato.

Theorem 2.8. *Siano $Y_t = \sum_{j=1}^{n} p_j B_t^j + p_{n+1} U_t^{n+1}$ ed $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ la sua filtrazione naturale completata.*

Con le notazioni precedentemente introdotte B_t^0 é un moto browniano rispetto alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ di Y_t. Valgono, inoltre, le seguenti relazioni:

1.

$$B_t^0 = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left[Y_t + \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s [1+\eta(u)]\, e^{\lambda_{n+1}\int_u^s \eta(l)dl} dY_u\right) ds\right]$$

2.

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left[e^{-\lambda_{n+1}(t-u)}\,[1+\eta(u)] + \eta(u)\right] dB_u^0$$

3.

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[B_t^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left[e^{-\lambda_{n+1}(t-u)} \left(B_u^0 + \int_0^u \eta(v) dB_v^0\right)\right] du\right]$$

4.

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[B_t^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s [1+\eta(u)]\, e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^0\right) ds\right]$$

Proof. 1. Per ottenere la prima relazione si sostituisce in

$$B_t^0 = Z_t - \int_0^t \left(\int_0^s g\,(s,u)\, dZ_u\right) ds$$

l'espressione di Z_t data da:

$$Z_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left[Y_t + \lambda_{n+1} \int_0^t Y_u du\right]$$

e si ottiene:

$$B_t^0 = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left[Y_t + \int_0^t \left(\lambda_{n+1} Y_s - \int_0^s g(s,u) dY_u - \int_0^s g(s,u) Y_u du\right) ds\right].$$

Utilizzando ora la regola di integrazione per parti nell'integrale:

$$\int_0^s g(s,u)Y_u du$$

e ponendo $G(s,u) = \int_0^u g(s,v)dv$ si ottiene facilmente la relazione:

$$\int_0^s g(s,u)Y_u du = \lambda_{n+1}Y_s - \int_0^s G(s,u)dY_u$$

Sostituendola ora nell'ultima relazione di B_t^0, si ricava la relazione cercata.

2. Nella relazione:

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dZ_s$$

si sostituisce a Z_u la relazione:

$$Z_t = B_t^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s \eta\left(u\right) dB_u^0\right) ds$$

e si ottiene:

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_s^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s \eta(u) e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_u^0\right) ds\right]$$

che, per il teorema di Fubini-Tonelli, si puó scrivere nella forma:

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_s^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_u^t \eta(u) e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} ds\right) dB_u^0\right]$$

che, semplificata, fornisce la relazione cercata.

3. Per ottenere la relazione indicata si consideri l'espressione:

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_s^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s \eta(u) e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_u^0\right) ds\right]$$

utilizzando la regola di integrazione per parti sul primo integrale si ottiene:

$$\int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} dB_s^0 = B_t^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} B_s^0 ds.$$

Sostituendo e semplificando si ottiene la relazione cercata.

4. Dalla relazione 1, ponendo $W_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} Y_t$, si ha:

$$B_t^0 = W_t + \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s [1 + \eta(u)] \, e^{\lambda_{n+1} \int_u^s \eta(l) dl} dW_u \right) ds$$

Che, riscritto nella forma standard:

$$B_t^0 = W_t - \int_0^t \left(\int_0^s -\lambda_{n+1} [1 + \eta(u)] \, e^{\lambda_{n+1} \int_u^s \eta(l) dl} dW_u \right) ds$$

individua il seguente nucleo di Volterra:

$$k(t,s) = \begin{cases} -\lambda_{n+1} [1 + \eta(s)] \, e^{\lambda_{n+1} \int_s^t \eta(l) dl} & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Utilizzando il lemma A2 in [Gua06] resta individuato il relativo risolvente negativo $\tilde{k}(t,s)$ mediante la relazione:

$$\tilde{k}(t,s) = \begin{cases} -k(t,s) e^{\int_s^t k(u,u) du} & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

dal quale, sostituendo, si ottiene la relazione:

$$\tilde{k}(t,s) = \begin{cases} \lambda_{n+1} [1 + \eta(s)] \, e^{-\lambda_{n+1}(t-s)} & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza si ha:

$$W_t = B_t^0 - \int_0^t \left(\int_0^s \tilde{k}(s,u) dB_u^0 \right) ds$$

da cui si deduce la relazione cercata:

$$Y_t = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[B_t^0 - \lambda_{n+1} \int_0^t \left(\int_0^s [1 + \eta(u)] \, e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^0 \right) ds \right]$$

$\square$

In base alla relazione 4 del teorema precedente l'agente non informato vede evolvere il valore del titolo secondo l'equazione:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[dB_t^0 - \lambda_{n+1} \left(\int_0^t [1 + \eta(u)] \, e^{-\lambda_{n+1}(t-u)} dB_u^0 \right) dt \right] \tag{12}$$

che si puó riscrivere nella forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left[\mu_t - \lambda_{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_t \int_0^t [1 + \eta(u)] \, e^{-\lambda_{n+1}(t-u)} dB_u^0 \right) \right] dt + \sigma_t \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} dB_t^0 \tag{13}$$

Invece, come é stato detto nel paragrafo precedente, l'agente informato vede evolvere il valore del titolo secondo l'equazione:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu_t - p_{n+1} \lambda_{n+1} \sigma_t U_t^{n+1} \right) dt + \sigma_t \sum_{j=1}^{n+1} p_j dB_t^j \tag{14}$$

che fa riferimento al moto browniano

$$\left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n+1} p_j B_t^j$$

3 Le funzioni valore per i due agenti

Come detto nel paragrafo precedente l'agente informato considera il valore del sottostante partendo da una ricchezza iniziale $x > 0$ e investe H_t unitá ottenendo il valore autofinanziato della ricchezza X_t in t mediante utilizzando i moti browniani assegnati. Invece l'agente non informato investe sempre una posta monetaria $x > 0$ ma utilizza il moto browniano B_t^0 per valutare l'evoluzione del valore della ricchezza ottenuta. In questa paragrafo vogliamo esaminare queste due situazioni e vogliamo anche valutare le relative funzioni di utilitá che i due agenti utilizzano.

3.1 La funzione valore per l'agente informato

Sia allora $x > 0$ la posta monetaria iniziale che l'agente informato investe nel titolo S_t. Per fare questo utilizza un opportuno processo stocastico, H_t, che in t rappresenta le quote di titolo utilizzate. In tal modo ottiene il valore (autofinanziato) della ricchezza X_t in t mediante la relazione:

$$X_t = x + \int_0^t H_s dS_s \tag{15}$$

Come anticipato, si vuole che il processo delle quote H_t, che si dirá ammissibile, sia predicibile rispetto alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^1\right)_{t\in[0,+\infty[}$, integrabile rispetto al processo S_t e tale che si abbia anche $X_t > 0$ quasi certamente e $\forall t \in [0, T]$.

Se poi $\mathcal{U}$ é la funzione di utilitá, l'agente massimizza l'utilitá media della ricchezza ottenuta nell'istante finale T. Per questo risolve il problema:

$$\sup\left\{E\left(\mathcal{U}\left(x + \int_0^T H_t dS_t\right)\right) : \quad H_t \quad ammissibile \quad \right\} \tag{16}$$

Allo scopo di garantire la positivitá della ricchezza prodota in ogni istante t si puó considerare il processo π_t definito dalla relazione $H_t = \pi_t \frac{X_t}{S_t}$

Quindi si ha:

$$X_t = x + \int_0^t \pi_s \frac{X_s}{S_s} dS_s \tag{17}$$

da cui si deduce

$$\frac{dX_t}{X_t} = \pi_t \frac{dS_t}{S_t} \tag{18}$$

cioé

$$\frac{dX_t}{X_t} = \pi_t \left(\mu_t - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_t U_t^{n+1}\right) dt + \pi_t \sigma_t \sum_{j=1}^{n+1} p_j dB_t^j \tag{19}$$

e, isolando il moto browniano:

$$W_t = \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n+1} p_j B_t^j$$

si ha:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \pi_t \left(\mu_t - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_t U_t^{n+1}\right) dt + \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \pi_t \sigma_t dW_t \tag{20}$$

Quindi il valore della ricchezza X_t all'istante t é data dalla relazione:

$$X_t = xe^{\int_0^t \left[\pi_s \left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\pi_s^2\sigma_s^2\right] ds + \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^t \pi_s\sigma_s dW_s} \tag{21}$$

e, di conseguenza, all'istante finale T si ha:

$$X_T = xe^{\int_0^T \left[\pi_s \left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\pi_s^2\sigma_s^2\right] ds + \left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^T \pi_s\sigma_s dW_s} \tag{22}$$

Considerando ora la funzione di utilitá logaritmica si ha il seguente risultato:

Theorem 3.1. *Sia $\mathcal{U}(y) = \log y$. Il processo*

$$\pi_s = \frac{\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\sigma_s^2}$$

fornisce la quota ottimale di investimento e la relativa funzione valore é data da:

$$u(x) = \log x + \frac{1}{2\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)} E\left[\int_0^T \frac{\left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right)^2}{\sigma_s^2} ds\right]$$

Proof. Risulta, $\forall\ \pi_s$ ammissibile,:

$$\mathcal{U}(X_T) = \log(X_T) = \log x + \int_0^T \left[\pi_s \left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\pi_s^2\sigma_s^2\right] ds +$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^T \pi_s\sigma_s dW_s$$

di conseguenza considerando il valore medio si ha:

$$E\left(\log(X_T)\right) = \log x + E\left[\int_0^T \left[\pi_s\left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\pi_s^2\sigma_s^2\right] ds\right]$$

Il relativo valore massimo si ricava applicando i risultati che consentono la derivazione sotto il segno di integrale. Di conseguenza la quota di portafoglio che massimizza, data la "sostanziale dipendenza quadratica da π_s, é data da:

$$\pi_s = \frac{\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\sigma_s^2}$$

e quindi il relativo valore massimo é:

$$u(x) = \log x + \frac{1}{2}E\left[\int_0^T \frac{\left(\mu_s - p_{n+1}\lambda_{n+1}\sigma_s U_s^{n+1}\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\sigma_s^2} ds\right]$$

da cui si deduce la relazione cercata. □

Esplicitando ancora l'espressione della funzione valore si ha il seguente risultato:

Theorem 3.2. *Risulta:*

$$u(x) = \log x + \frac{1}{2\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds + \frac{p_{n+1}^2}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\left[\frac{T\lambda_{n+1}}{4} - \frac{1 - e^{-2T\lambda_{n+1}}}{8}\right]$$

Proof. Sviluppando il quadrato dell'integrando si ha:

$$u(x) = \log x + \frac{1}{2\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} E\left[\int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds\right] - \frac{p_{n+1}\lambda_{n+1}}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} E\left[\int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} U_s^{n+1} ds\right] + \frac{p_{n+1}^2\lambda_{n+1}^2}{2\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} E\left[\int_0^T \left[U_s^{n+1}\right]^2 ds\right]$$

Poiché le funzioni μ_s e σ_s sono deterministiche si ha: $E\left[\int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds\right] = \int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds$

Inoltre risulta:

$$E\left[\int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} U_s^{n+1} ds\right] = E\left[\int_0^T \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\int_0^s e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^{n+1}\right) ds\right] =$$

$$\int_0^T E\left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\int_0^s e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^{n+1}\right) ds =$$

$$\int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} E\left(\int_0^s e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^{n+1}\right) ds = \int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} 0 ds = 0$$

Infine si ha:

$$E\left[\int_0^T \left[U_s^{n+1}\right]^2 ds\right] = \int_0^T E\left[\left[\int_0^s e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^{n+1}\right]^2\right] ds =$$

$$\int_0^T \left[\int_0^s e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)} du\right] ds = \frac{T}{2\lambda_{n+1}} - \frac{1-e^{-2\lambda_{n+1}}}{4\lambda_{n+1}^2}$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti si ha la tesi.

□

3.2 La funzione valore per l'agente parzialmente informato

In modo analogo l'agente non informato considera le quote di investimento fornite mediante processi K_t ammissibili, cioé: sono predicibili rispetto alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$, integrabili rispetto al processo S_t e tale che si abbia anche $X_t > 0$ quasi certamente e $\forall t \in [0,T]$.

Se poi $\mathcal{V}$ é la sua funzione di utilitá, l'agente massimizza l'utilitá media del valore della ricchezza all'istante finale T. Per questo risolve il problema:

$$\max\left\{E\left(\mathcal{V}\left(x + \int_0^T K_t dS_t\right)\right) : \quad K_t \quad \textit{ammissibile} \quad \right\} \tag{23}$$

Anche in questo caso l'agente considera il processo κ_t definito dalla relazione

$$K_t = \kappa_t \frac{X_t}{S_t}$$

Quindi si ha:

$$X_t = x + \int_0^t \kappa_s \frac{X_s}{S_s} dS_s \tag{24}$$

da cui si deduce

$$\frac{dX_t}{X_t} = \kappa_t \frac{dS_t}{S_t} \tag{25}$$

cioé, posto:

$$\nu_t = -\lambda_{n+1} \int_0^t [1 + \eta(u)] \, e^{-\lambda_{n+1}(t-u)} dB_u^0$$

si ha:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \kappa_t \left[\mu_t + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu_t \sigma_t \right] dt + \kappa_t \sigma_t \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} dB_t^0 \tag{26}$$

La ricchezza all'istante t, se $x > 0$ é quella iniziale, é quindi data da:

$$X_t = xe^{\int_0^t \left(\kappa_s \left[\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu_s \sigma_s \right] - \frac{1}{2} \kappa_s^2 \sigma_s^2 \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right) \right) ds + \int_0^t \kappa_s \sigma_s \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} dB_s^0} \tag{27}$$

e, di conseguenza, all'istante finale T si ha:

$$X_T = xe^{\int_0^T \left(\kappa_s \left[\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu_s \sigma_s \right] - \frac{1}{2} \kappa_s^2 \sigma_s^2 \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right) \right) ds + \int_0^T \kappa_s \sigma_s \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} dB_s^0} \tag{28}$$

Considerando ora la funzione di utilitá logaritmica si ha il seguente risultato:

Theorem 3.3. *Sia $\mathcal{V}(y) = \log y$. Il processo*

$$\kappa_s = \frac{\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu_s \sigma_s}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right) \sigma_s^2}$$

dove

$$\nu_s = -\lambda_{n+1} \int_0^s [1+\eta(u)]\, e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^0$$

fornisce la quota ottimale di investimento.
La relativa funzione valore é data da:

$$v(x) = \log x + \frac{1}{2\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)} E\left[\int_0^T \frac{1}{\sigma_s^2}\left(\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \nu_s \sigma_s\right)^2 ds\right]$$

Proof. Risulta, $\forall\ \kappa_s$ ammissibile,:

$$\mathcal{V}(X_T) = \log(X_T) = \log x + \int_0^T \left[\kappa_s\left(\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \nu_s\sigma_s\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\kappa_s^2\sigma_s^2\right] ds +$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \int_0^T \pi_s \sigma_s dW_s$$

di conseguenza considerando il valore medio si ha:

$$E\left(\log(X_T)\right) = \log x + E\left[\int_0^T \left[\kappa_s\left(\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \nu_s\sigma_s\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\kappa_s^2\sigma_s^2\right] ds\right]$$

Il relativo valore massimo si ricava applicando i risultati che consentono la derivazione sotto il segno di integrale. Di conseguenza la quota di portafoglio che massimizza, data la "sostanziale dipendenza quadratica" da κ_s, é data da:

$$\kappa_s = \frac{\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \nu_s\sigma_s}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)\sigma_s^2}$$

e quindi il relativo valore massimo é:

$$v(x) = \log x + \frac{1}{2} E \left[\int_0^T \frac{\left(\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu_s \sigma_s \right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right) \sigma_s^2} ds \right]$$

da cui si deduce la relazione cercata. □

Esplicitando ancora l'espressione della funzione valore si ha il seguente risultato:

Theorem 3.4. *Risulta:*

$$v(x) = \log x + \frac{1}{2 \sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} \int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds + \frac{\lambda_{n+1}^2}{2} \int_0^T \left[\int_0^s \left[1 + \eta(u) \right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)} du \right] ds$$

Proof. Della espressione:

$$v(x) = \log x + \frac{1}{2 \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)} E \left[\int_0^T \frac{1}{\sigma_s^2} \left(\mu_s + \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \nu_s \sigma_s \right)^2 ds \right]$$

sviluppando il quadrato e semplificando si ha:

$$v(x) = \log x + \frac{1}{2 \sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} E \left[\int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds \right] + \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}} E \left[\int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} \nu_s ds \right] + \frac{1}{2} E \left[\int_0^T \nu_s^2 ds \right] =$$

$$\log x + \frac{1}{2 \sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} \int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds + \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} E\left[\nu_s \right] ds + \frac{1}{2} E \left[\int_0^T \nu_s^2 ds \right]$$

$$\log x + \frac{1}{2\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2} \int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2} ds + \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \frac{\mu_s}{\sigma_s} E\left[\nu_s\right] ds + \frac{1}{2} E\left[\int_0^T \nu_s^2 ds\right] =$$

Inoltre risulta:

$$E\left[\nu_s\right] = E\left[-\lambda_{n+1} \int_0^s \left[1+\eta(u)\right] e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^0\right] = 0$$

Infine si ha:

$$E\left[\int_0^T \nu_s^2 ds\right] = \int_0^T E\left[\nu_s^2\right] ds = \int_0^T E\left[\left(-\lambda_{n+1} \int_0^s \left[1+\eta(u)\right] e^{-\lambda_{n+1}(s-u)} dB_u^0\right)^2\right] ds =$$

$$\lambda_{n+1}^2 \int_0^T \left[\int_0^s \left[1+\eta(u)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)} du\right] ds$$

Mettendo insieme i risultati ottenuti si ha la tesi.

□

Allo scopo di poter confrontare le due funzioni valore finora ottenute consideriamo il seguente risultato:

Theorem 3.5. *Risulta:*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^s \left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)} du\right] ds = \frac{\left(1-A\right)^2}{2\lambda_{n+1}}$$

dove $A = \left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Proof. Preliminarmente verifichiamo che si ha:

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(T-u)} du = \frac{\left(1-A\right)^2}{2\lambda_{n+1}}$$

Operando nell'integrale il seguente cambio di variabile $v = T - u$ si ottiene:

$$\int_0^T \left[1+\eta\left(T-v\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(v)} dv$$

Inoltre, indicato con $I_{[0,T]}$ la funzione indicatrice dell'intervallo $[0,T]$ il limite si puó scrivere nella forma:

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left[1+\eta\left(T-v\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(v)}I_{[0,T]}\left(v\right)dv$$

A questo punto notiamo che, essendo $\lim_{T\to+\infty}\eta\left(T-v\right)=-A$, la funzione integranda tende puntualmente alla funzione $v\in[0,+\infty[\mapsto\left(1-A\right)^2 e^{-2\lambda_{n+1}v}$.

Inoltre la funzione integranda verifica le disuguaglianze:

$$0\leq\left[1+\eta\left(T-v\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(v)}I_{[0,T]}\left(v\right)dv\leq\left(1+A\right)e^{-2\lambda_{n+1}v}\quad\forall\ v\in[0,+\infty[$$

e le funzioni minorante e maggiorante sono integrabili sulla semiretta $[0,+\infty[$. Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue permette di dare la relatione:

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left[1+\eta\left(T-v\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(v)}I_{[0,T]}\left(v\right)dv=\int_0^{+\infty}\left(1-A\right)^2 e^{-2\lambda_{n+1}v}dv$$

da cui, integrano il secondo membro, si ottiene la relazione:

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T}\left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(T-u)}du=\frac{\left(1-A\right)^2}{2\lambda_{n+1}}$$

Da essa utilizzando risulati standard si ricava la relazione:

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T}\left[\int_0^{s}\left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)}du\right]ds=+\infty$$

Utilizzando infine la regola di De L'Ospital si ottiene la tesi. □

4 Un confronto tra le funzioni valore

Nelle precedenti sezioni sono state determinate le espressioni che definiscono le funzioni valore dei due investitori: $u(x)$ per quello informato e $v(x)$ per quello parzialmente informato. In questa sezione si vuole evidenziare la divergenza, quando $T\to+\infty$, delle due funzioni utilitá e anche, sempre quando $T\to+\infty$, il notevole divario di utilitá attesa che i due soggetti hanno in conseguenza delle differenti informazioni utilizzate.

Si puó enunciare il risultato seguente:

Theorem 4.1. *Valgono le seguenti proprietá:*

1.

$$\lim_{T\to+\infty} u(x) = \lim_{T\to+\infty}\left(\log x + \frac{1}{2\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2}ds + \frac{p_{n+1}^2}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\left[\frac{2T\lambda_{n+1} - 1 + e^{-2T\lambda_{n+1}}}{8}\right]\right) = +\infty$$

2.

$$\lim_{T\to+\infty} v(x) = \left(\log x + \frac{1}{2\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\int_0^T \frac{\mu_s^2}{\sigma_s^2}ds + \frac{\lambda_{n+1}^2}{2}\int_0^T\left[\int_0^s \left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)}du\right]ds\right) = +\infty$$

3.

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{u(x)-v(x)}{T} = \frac{\lambda_{n+1}}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{-1}\left[\left(\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

di conseguenza si ha:

$$\lim_{T\to+\infty}\left[u(x)-v(x)\right] = +\infty$$

Proof. I primi due punti sono di facile verifica.

Per il terzo punto si noti che é:

$$u(x)-v(x) = \frac{p_{n+1}^2}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\left[\frac{2T\lambda_{n+1} - 1 + e^{-2T\lambda_{n+1}}}{8}\right] - \frac{\lambda_{n+1}^2}{2}\int_0^T\left[\int_0^s \left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)}du\right]ds$$

e quindi:

$$\frac{u(x)-v(x)}{T} = \frac{p_{n+1}^2}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j^2}\left[\frac{2T\lambda_{n+1} - 1 + e^{-2T\lambda_{n+1}}}{8T}\right] - \frac{\lambda_{n+1}^2}{2T}\int_0^T\left[\int_0^s \left[1+\eta\left(u\right)\right]^2 e^{-2\lambda_{n+1}(s-u)}du\right]ds$$

di conseguenza si ha:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{u(x)-v(x)}{T}=\frac{\lambda_{n+1}}{4}\left(\frac{p_{n+1}^2}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2}-\left[1-\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^2\right)$$

sviluppando il quadrato si ha:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{u(x)-v(x)}{T}=\frac{\lambda_{n+1}}{4}\left(\frac{p_{n+1}^2}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2}-1+2\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2}\right)$$

e quindi:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{u(x)-v(x)}{T}=\frac{\lambda_{n+1}}{4}\frac{p_{n+1}^2-\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2+2\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}-\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2}$$

cioé

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{u(x)-v(x)}{T}=\frac{\lambda_{n+1}}{2}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}-\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2}$$

da cui:

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{u(x)-v(x)}{T}=\frac{\lambda_{n+1}}{2}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}p_j^2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n+1}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{j=1}^{n}p_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

facili semplificazioni portano poi alla tesi. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[Che03] P. Cheridito, Representation of Gaussian measures that are equivalent to Wiener measure, Sminaire de Probabilitis, XXXVII, Lecture Notes in Math., vol. 1382, Springer, Berlin, 2003, pp. 81-90.

[Fa70] E.F. Fama, Efficient capital market: a review of theory and empirical work, J Finance 25, 383-417 (1970).

[Hit68] Masuyuki Hitsuda, Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process, Osaka J. Math. 5 (1968), pp. 299-312.

[Gua06] Paolo Guasoni, Asymmetric information in fads models, Finance and Stochastics, 10 (2006), no. 2 pp. 159-177.

[RY99] D. Revuz-M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion. In: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol 293, 3rd edn. Berlin Heidelberg New York: Springer 1999

[Sh81] R.J. Shiller, Do stock prices move too much to be justified by susequent changei in dividends? Am Econ Rev 71, 421-436 (1981)

[Su86] L. Summers, Does the stock market rationally reflect fundamental values? J Finance 41, 591-601 (1986)