UNIVERSITÀ DEL SALENTO

QUADERNI DEL DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELL'ECONOMIA

ASIMMETRIA INFORMATIVA IN UN MODELLO DI MERCATO CON TRE PROCESSI DI ORNSTEIN-UHLENBECK

Donato Scolozzi
Luigi Romano

Numero MS/3
Dicembre 2013

DIPARTIMENTO DI SCIENZE DELL'ECONOMIA
FACOLTÀ DI ECONOMIA
UNIVERSITÀ DEL SALENTO - LECCE
ISSN 2284-0818

Quaderni del Dipartimento di Scienze dell'Economia

I Quaderni intendono favorire la circolazione di studi in versione preliminare, al fine di accelerarne la diffusione e per sollecitare suggerimenti e critiche.

Vengono considerati per la pubblicazione sui Quaderni del Dipartimento solo lavori non ancora pubblicati in versione definitiva su libri o su rivista. Possono proporre lavori per la pubblicazione membri del Dipartimento (anche in collaborazione con studiosi esterni) o studiosi che abbiano presentato il lavoro in oggetto nell'ambito di conferenze o seminari svolti nell'ambito delle attività dipartimentali.

I quaderni si articolano in quattro sezioni: Aziendale, Economica, Giuridica, Matematico Statistica.
I quaderni vengono regolarmente inviati a Istituti, Dipartimenti e Biblioteche a carattere economico e sono inclusi nella serie Research Papers in Economics (REPEC).

L'accesso ai Quaderni è approvato dal Coordinatore scientifico della sezione.

Coordinatori scientifici:

Sezione di economia aziendale (A): **Antonio Costa**
Sezione economica (E): **Giampaolo Arachi**
Sezione giuridica (G): **Franco Paparella**
Sezione Matematico-Statistica (MS): **Donato Posa**

Editore:

Dipartimento di Scienze dell'Economia
Indirizzo mail: direzione.dipeconomia@unisalento.it
Ecotekne - via Monteroni
73100 Lecce

Codice ISSN: 2284-0818

ASIMMETRIA INFORMATIVA IN UN MODELLO DI MERCATO CON TRE PROCESSI DI ORNSTEIN-UHLENBECK[1]

(prima parte)

Donato Scolozzi[2] - Luigi Romano[3]

Dipartimento di Scienze dell'Economia

Sezione matematematico-statistica

Universitá del Salento

Introduzione

In [RS13] é stato esteso il lavoro [GUA06] al caso di $n+1$ moti browniani indipendenti di cui uno individua un processo di Ornestein-Uhlenbeck.

In questo lavoro consideriamo tre moti browniani indipendenti ed un mercato la cui incertezza é regolata dai tre processi di Ornstein-Uhlenbeck individuati ciascuno di essi da uno dei tre moti assegnati.

Si intende individuare le caratteristiche del processo individuato da una combinazione lineare dei tre processi di Ornstein-Uhlenbeck che a sua volta individua l'evoluzione del valore di un titolo. In particolare si prova che il processo cosí ottenuto non é markoviano. In tal caso si tratta di individuare un moto browniano che ne determina l'intera dinamica attraverso la rappresentazione di Hitsuda. Questo problema sará esaminato in un altro studio.

parole chiave: processi stocastici; rappresentazione di Hitsuda; asimmetria informativa

codici classificazione AMS: 60G15; 62M07; 45D05

[1] lavoro completato nel mese di novembre 2013

[2] donato.scolozzi@unisalento.it

[3] luigi.romano@unisalento.it

1 Il modello

Consideriamo un mercato finanziario in cui sono presenti un titolo privo di rischio D ed un titolo rischioso S. Supponiamo deterministico il tasso di interesse di mercato. Per descrivere la dinamica del titolo rischioso consideriamo uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ su cui sono definiti tre moti browniani indipendenti:

$$\left(B_t^1\right)_{t\in[0,+\infty[},\ \left(B_t^2\right)_{t\in[0,+\infty[},\ \left(B_t^3\right)_{t\in[0,+\infty[}$$

Per ogni $j = 1, 2, 3$, assegnato il parametro reale $\lambda_j > 0$, consideriamo il processo di Ornstein-Uhlenbeck $\left(U_t^j\right)_{t\in[0,+\infty)}$ definito dalla equazione:

$$U_t^j + \lambda_j \int_0^t U_s^j ds = B_t^j, \qquad t \in [0, +\infty[\tag{1}$$

che, come noto, é dato dalla relazione:

$$U_t^j = \int_0^t e^{-\lambda_j (t-s)} dB_s^j \tag{2}$$

Asseganti poi i numeri reali p_j, con $j = 1, 2, 3$ e non tutti nulli, consideriamo il processo $(Y_t)_{t\in[0,+\infty)}$ definito da:

$$Y_t = p_1 U_t^1 + p_2 U_t^2 + p_3 U_t^3. \tag{3}$$

Consideriamo ora due funzioni deterministiche

$$\mu, \sigma : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

misurabili secondo Lebesgue e tali che

$$\forall\ T > 0 \qquad \mu \in L^1\left([0,T]\right), \quad \sigma \in L^2\left([0,T]\right)$$

Supponiamo che il prezzo del titolo rischioso sia regolato dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dY_t \tag{4}$$

la cui soluzione, come noto, é data dalla relazione:

$$S_t = S_0 \exp\left[\int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s dY_s\right]. \tag{5}$$

E' possibile ora interpretare la situazione ottenuta nel modo seguente: esiste un investitore che ha le informazioni che gli vengono dai tre moti browniani e che chiameremo "investitore informato", e c'é l'investitore che invece fa riferimento alle informazioni che gli vengono dal processo Y e che chiameremo "investitore parzialmente informato".

Il primo, quindi, fa riferimento alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^1\right)_{t\in[0,+\infty[}$ ottenuta completando la filtrazione naturale generata dai tre moti browniani $\left(B^1, B^2, B^3\right)$, che quindi soddisfa le usuali condizioni di completezza e di continuitá da destra.

Il secondo, invece, fa riferimento alla filtrazione $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ generata dal processo Y (o equivalentemente da S).

Evidentemente risulta $\mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t^1$ per ogni t.

Volendo reinterpretare la situazione dell'agente informato, é possibile affermare che il valore del titolo rischioso evolve seguendo i moti browniani assegnati; il suo valore é quindi determinato dalla equazione:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu_t - p_1\lambda_1\sigma_t U_t^1 - p_2\lambda_2\sigma_t U_t^2 - p_3\lambda_3\sigma_t U_t^3\right) dt + \tag{6}$$

$$\sigma_t \left(p_1 dB_t^1 + p_2 dB_t^2 + p_3 dB_t^3\right) \tag{7}$$

che fa riferimento al moto browniano

$$W_t = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}} dB_t^1 + \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}} dB_t^2 + \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}} dB_t^3.$$

Ora vogliamo individuare, per l'agente parzialmente informato, una analoga equazione che rappresenta Y, e quindi S, in termini della filtrazione $\mathcal{F}^0$ e di un opportuno moto browniano B_t^0.

2 Scomposizione del processo Y rispetto ad $\mathcal{F}^0$

In questo paragrafo esaminiamo la proprietá di markovianitá di Y e determiniamo, rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}^0$, il relativo moto browniano B^0 che lo rappresenta.

Theorem 2.1. *Il processo Y verifica le seguenti proprietá:*

1. *Y é gaussiano*
2. $E\left(Y_t\right) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$
3. $\Gamma(s,t) = cov\left(Y_s, Y_t\right) = E\left(Y_s Y_t\right) =$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(e^{-\lambda_j|t-s|} - e^{-\lambda_j(t+s)}\right) \qquad \forall\ s,t \in [0,+\infty[$$

Proof. $\Gamma(s,t) = cov\left(Y_s, Y_t\right) = E\left(Y_s Y_t\right) = E\left(\left[\sum_{j=1}^{3} p_j U_s^j\right]\left[\sum_{j=1}^{3} p_j U_t^j\right]\right) =$

$$= E\left(\left[\sum_{j=1}^{3} p_j \int_0^s e^{-\lambda_j(s-u)} dB_u^j\right]\left[\sum_{j=1}^{3} p_j \int_0^t e^{-\lambda_j(t-u)} dB_u^j\right]\right)$$

per l'indipendenza dei tre moti browniani si ha:

$$E\left(\sum_{j=1}^{3} p_j^2 \left[\int_0^{s\wedge t} e^{-\lambda_j(s-u)} dB_u^j\right]\left[\int_0^{s\wedge t} e^{-\lambda_j(t-u)} dB_u^j\right]\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{3} p_j^2 \left[\int_0^{s\wedge t} e^{-\lambda_j(s+t-2u)} du\right] = \sum_{j=1}^{3} \frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(e^{-\lambda_j(s+t-2s\wedge t)} - e^{-\lambda_j(s+t)}\right)$$

essendo poi $s + t - 2s \wedge t = |t - s|$ si ha la tesi.

□

Possiamo considerare ora il seguente risultato:

Theorem 2.2. *Y é di Markov se e solo se si ha: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.*

per dimostrare questo teorema, se $\Gamma(s,t) = cov(Y_s, Y_t)$ é la funzione di covarianza del processo Y facciamo riferimento al seguente risultato per il quale vedi [D. Revuz - M. Yor, III.1.13].

Theorem 2.3. *Y é di Markov se e e solo se risulta:*

$$\Gamma(s,t)\Gamma(t,u) = \Gamma(t,t)\Gamma(s,u) \quad \forall\ s \le t \le u$$

Proof. Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ allora, indicato con λ il valore comune, $\forall\ s \le t \le u$ si ha:

$$\Gamma(s,t)\Gamma(t,u) - \Gamma(t,t)\Gamma(t,s) = \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{p_j^2}{2\lambda}\left(e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t+s)}\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{p_j^2}{2\lambda}\left(e^{-\lambda(u-t)} - e^{-\lambda(u+t)}\right)\right] -$$

$$\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{p_j^2}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{3} \frac{p_j^2}{2\lambda}\left(e^{-\lambda(u-s)} - e^{-\lambda(u+s)}\right)\right] =$$

$$\frac{\left(e^{-\lambda(t-s)}-e^{-\lambda(t+s)}\right)\left(e^{-\lambda(u-t)}-e^{-\lambda(u+t)}\right)-\left(1-e^{-2\lambda t}\right)\left(e^{-\lambda(u-s)}-e^{-\lambda(u+s)}\right)}{4\lambda^2}\left[\sum_{j=1}^{3}p_j^2\right]^2$$

sviluppando i prodotti si ha la tesi, cioé:

$$\Gamma(s,t)\Gamma(t,u)=\Gamma(t,t)\Gamma(t,s)$$

Viceversa se, $\forall\ s\leq t\leq u$, risulta: $\Gamma(s,t)\Gamma(t,u)-\Gamma(t,t)\Gamma(t,s)=0$ allora si ha:

$$\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(e^{-\lambda_j(t-s)}-e^{-\lambda_j(t+s)}\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(e^{-\lambda_j(u-t)}-e^{-\lambda_j(u+t)}\right)\right]-$$

$$\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(1-e^{-2\lambda_j t}\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(e^{-\lambda_j(u-s)}-e^{-\lambda_j(u+s)}\right)\right]=0$$

Che, posto

$$A=\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(e^{-\lambda_j(t-s)}-e^{-\lambda_j(t+s)}\right)\right],\qquad B=\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{p_j^2}{2\lambda_j}\left(1-e^{-2\lambda_j t}\right)\right]$$

si puó scrivere nella forma:

$$A\left[\frac{p_1^2}{2\lambda_1}e^{-\lambda_1 u}\left(e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)+\frac{p_2^2}{2\lambda_2}e^{-\lambda_2 u}\left(e^{\lambda_2 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)+\frac{p_3^2}{2\lambda_3}e^{-\lambda_3 u}\left(e^{\lambda_3 t}-e^{-\lambda_3 t}\right)\right]-$$

$$B\left[\frac{p_1^2}{2\lambda_1}e^{-\lambda_1 u}\left(e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}\right)+\frac{p_2^2}{2\lambda_2}e^{-\lambda_2 u}\left(e^{\lambda_2 s}-e^{-\lambda_2 s}\right)+\frac{p_3^2}{2\lambda_3}e^{-\lambda_3 u}\left(e^{\lambda_3 s}-e^{-\lambda_3 s}\right)\right]=0$$

$$\frac{p_1^2}{2\lambda_1}e^{-\lambda_1 u}\left[A\left(e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)-B\left(e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}\right)\right]+$$

$$\frac{p_2^2}{2\lambda_2}e^{-\lambda_2 u}\left[A\left(e^{\lambda_2 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)-B\left(e^{\lambda_2 s}-e^{-\lambda_2 s}\right)\right]+$$

$$\frac{p_3^2}{2\lambda_3}e^{-\lambda_3 u}\left[A\left(e^{\lambda_3 t}-e^{-\lambda_3 t}\right)-B\left(e^{\lambda_3 s}-e^{-\lambda_3 s}\right)\right]=0$$

Moltiplicando ora per $e^{\lambda_1 u+\lambda_2 u+\lambda_3 u}$ si ha $\forall \;\; s \leq t \leq u$:

$$\frac{p_1^2}{2\lambda_1}e^{\lambda_2 u+\lambda_3 u}\left[A\left(e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)-B\left(e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}\right)\right]+$$

$$\frac{p_2^2}{2\lambda_2}e^{\lambda_1 u+\lambda_3 u}\left[A\left(e^{\lambda_2 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)-B\left(e^{\lambda_2 s}-e^{-\lambda_2 s}\right)\right]+$$

$$\frac{p_3^2}{2\lambda_3}e^{\lambda_1 u+\lambda_2 u}\left[A\left(e^{\lambda_3 t}-e^{-\lambda_3 t}\right)-B\left(e^{\lambda_3 s}-e^{-\lambda_3 s}\right)\right]=0$$

da cui si deduce, passando al limite per $u \to +\infty$,

$$\left[A\left(e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)-B\left(e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}\right)\right]=0$$

$$\left[A\left(e^{\lambda_2 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)-B\left(e^{\lambda_2 s}-e^{-\lambda_2 s}\right)\right]=0$$

$$\left[A\left(e^{\lambda_3 t}-e^{-\lambda_3 t}\right)-B\left(e^{\lambda_3 s}-e^{-\lambda_3 s}\right)\right]=0$$

Cioé $\forall \;\; s \leq t$:

$$\frac{B}{A}=\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}}=\frac{e^{\lambda_2 t}-e^{-\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 s}-e^{-\lambda_2 s}}=\frac{e^{\lambda_3 t}-e^{-\lambda_3 t}}{e^{\lambda_3 s}-e^{-\lambda_3 s}}$$

e quindi:

$$\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}}{e^{\lambda_2 t}-e^{-\lambda_2 t}}=\frac{e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}}{e^{\lambda_2 s}-e^{-\lambda_2 s}} \quad \text{e} \quad \frac{e^{\lambda_1 t}-e^{-\lambda_1 t}}{e^{\lambda_3 t}-e^{-\lambda_3 t}}=\frac{e^{\lambda_1 s}-e^{-\lambda_1 s}}{e^{\lambda_3 s}-e^{-\lambda_3 s}}$$

Da tali relazioni, eventualmente passando al limite per $t \to +\infty$, si ricava l'uguaglianza $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\lambda_1 = \lambda_3$ $\square$

In questo la lavoro siamo interessati a considerare il caso in cui i tre parametri sono diversi tra loro e quindi il caso in cui il processo Y_t non é markoviano. In tal caso ci interessa individuare, attraverso il risultato di Hitsuda, il moto browniano B_t^0 che ne individua la dinamica.

Si noti che in [Gua06] é stato esaminato il caso $p_3 = 0$, $p_1^2 + p_2^2 = 1$ e $\lambda_1 = 0$ ed in [SR13] é stato esaminato il caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ottenendo quindi un processo non markoviano.

Allo scopo di individuare per Y_t una dinamica attraverso il procedimento di Hitsuda, consideriamo un secondo processo Z_t definito, $\forall \ \ t \geq 0$, da:

$$Z_t = p_1 B_t^1 + p_2 B_t^2 + p_3 B_t^3 + p_1 (\lambda_2 + \lambda_3) \int_0^t B_s^1 ds + p_2 (\lambda_1 + \lambda_3) \int_0^t B_s^2 ds + p_3 (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^t B_s^3 ds +$$

$$p_1 \lambda_2 \lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s B_u^1 du \right] ds + p_2 \lambda_1 \lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s B_u^2 du \right] ds + p_3 \lambda_1 \lambda_2 \int_0^t \left[\int_0^s B_u^3 du \right] ds$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti ed il teorema di Fubini-Tonelli esso si puó scrivere nella forma seguente:

$$Z_t = p_1 \int_0^t \left[1 + (\lambda_2 + \lambda_3)(t-u) + \lambda_2 \lambda_3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(t-u)^2}{2} \right) \right] dB_u^1 +$$

$$p_2 \int_0^t \left[1 + (\lambda_1 + \lambda_3)(t-u) + \lambda_1 \lambda_3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(t-u)^2}{2} \right) \right] dB_u^2 +$$

$$p_3 \int_0^t \left[1 + (\lambda_1 + \lambda_2)(t-u) + \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(t-u)^2}{2} \right) \right] dB_u^3$$

Per esso si ha il seguente risultato:

Theorem 2.4. *1. Z_t é gaussiano*

2. $E(Z_t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$

3. $cov\left(Z_t, Z_s\right) = p_1^2 \int_0^{t\wedge s} \left[1 + \left(\lambda_2 + \lambda_3\right)(t-u) + \lambda_2\lambda_3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(t-u)^2}{2}\right)\right] \cdot$

$$\left[1 + \left(\lambda_2 + \lambda_3\right)(s-u) + \lambda_2\lambda_3 \left(\frac{s^2}{2} + \frac{(s-u)^2}{2}\right)\right] du +$$

$$p_2^2 \int_0^{t\wedge s} \left[1 + \left(\lambda_1 + \lambda_3\right)(t-u) + \lambda_1\lambda_3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(t-u)^2}{2}\right)\right] \cdot$$

$$\left[1 + \left(\lambda_1 + \lambda_3\right)(s-u) + \lambda_1\lambda_3 \left(\frac{s^2}{2} + \frac{(s-u)^2}{2}\right)\right] du +$$

$$p_3^2 \int_0^{t\wedge s} \left[1 + \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)(t-u) + \lambda_1\lambda_2 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{(t-u)^2}{2}\right)\right] \cdot$$

$$\left[1 + \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)(s-u) + \lambda_1\lambda_2 \left(\frac{s^2}{2} + \frac{(s-u)^2}{2}\right)\right] du$$

Proof. Le prime due proprietá sono di facile verifica.

La terza si deduce dal fatto che i tre moti browniani assegnati sono tra loro indipendenti. □

Per il seguito é comodo fare le seguenti posizioni:

$$h_1(\alpha, \beta) = 1 + \left(\lambda_2 + \lambda_3\right)(\alpha - \beta) + \lambda_2\lambda_3 \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\right)$$

$$h_2(\alpha, \beta) = 1 + \left(\lambda_1 + \lambda_3\right)(\alpha - \beta) + \lambda_1\lambda_3 \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\right)$$

$$h_3(\alpha, \beta) = 1 + \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)(\alpha - \beta) + \lambda_1\lambda_2 \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2}\right)$$

$$H(t, s, u) = \sum_{j=1}^{3} \left[p_j^2 h_j(t, u) h_j(s, u) - p_j^2\right]$$

$$F(t,s) = \int_0^{t\wedge s} H(t,s,u)du$$

In tal modo risulta:

$$cov\left(Z_t, Z_s\right) = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) t \wedge s + F(t,s)$$

Per poter poi individuare, tramite il metodo di Hitsuda, il moto browniano B_t^0 che rappresnta il processo Y_t rispetto alla sua filtrazione naturale $\left(\mathcal{F}_t^0\right)_{t\in[0,+\infty[}$ é opportuno, preliminarmente, individuare la funzione $\tilde{f}(t,s)$ tale per cui si possa scrivere

$$cov\left(Z_t, Z_s\right) = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) \left[t \wedge s - \int_0^t \int_0^s \tilde{f}(u,v)dudv\right]$$

Per tale motivo possiamo considerare il seguente risultato:

Theorem 2.5. *Nelle condizioni assegnte,* $\forall \quad s \leq t$*, posto*

$$\tilde{\ell}(t,s) = \int_0^s \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}(t,s,w)dw + \frac{\partial H}{\partial t}(t,s,s)$$

vale la relazione:

$$F(t,s) = \int_0^t \int_0^s \tilde{\ell}(u,v)dudv$$

e quindi considerando

$$\tilde{f}(t,s) = -\frac{\tilde{\ell}(t,s)}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

si ha:

$$cov\left(Z_t, Z_s\right) = \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) \left[t \wedge s - \int_0^t \int_0^s \tilde{f}(u,v)dudv\right]$$

Proof. $\forall \;\; 0 < s < t$ si ha:

$$F(t,s) = \int_0^s H(t,s,w)dw$$

e quindi risulta:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) = \int_0^s \frac{\partial H}{\partial t}(t,s,w)dw, \quad \frac{\partial F}{\partial s}(t,s) = \int_0^s \frac{\partial H}{\partial s}(t,s,w)dw + H(t,s,s)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(t,s) = \int_0^s \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}(t,s,w)dw + \frac{\partial H}{\partial t}(t,s,s) = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s,t)$$

Di conseguenza si ha:

$$F(t,s) = F(0,0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(u,0)du + \int_0^s \frac{\partial F}{\partial s}(t,v)dv = \int_0^s \left[\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(u,v)du \right] dv =$$

$$\int_0^t \left[\int_0^s \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(u,v)dv \right] du = \int_0^s \int_0^t \left[\int_0^v \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial t}(u,v,w)dw + \frac{\partial H}{\partial u}(u,v,v) \right] dudv$$

□

Riprendendo [Gua06], la funzione $F(t,s)$ ivi esaminata é data da:

$$F(t,s) = \int_0^{t \wedge s} \left(p^2 \left[1 + \lambda (t-u) \right] \left[1 + \lambda (s-u) \right] - p^2 \right) du$$

con $0 < p < 1$. Considerando quindi la funzione

$$H(t,s,u) = p^2 \left(\left[1 + \lambda (t-u) \right] \left[1 + \lambda (s-u) \right] - 1 \right)$$

si ricava, $\forall \; s \leq t$:

$$\tilde{\ell}(t,s) = \int_0^s \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial s}(t,s,w)dw + \frac{\partial H}{\partial t}(t,s,s) = p^2\left(\lambda^2 s + \lambda\right)$$

e la funzione $\tilde{f}(t,s)$ ivi esaminata é data da $\tilde{f}(t,s) = -\tilde{\ell}(t,s)$.

Analogo ragionamento é stato fatto in [SR13].

A questo punto per determinare il moto browniano, seguendo Hitsuda, si tratta di individuare una funzione $\tilde{g}(t,s)$ tale che si abbia:

$$\tilde{f}(t,s) = \tilde{g}(t,s) - \int_0^s \tilde{g}(t,w)\tilde{g}(s,w)dw \quad \forall\ 0 \leq s \leq t$$

In tal caso esiste una moto browniano B_t^0 tale che si abbia:

$$Z_t = B_t^0 - \int_0^t \left[\int_0^s \tilde{g}(s,w)dB_w^0\right] ds$$

In [Gua06] ed in [SR13] la funzione $\tilde{f}(t,s)$ era in realtá dipendente dalla sola variabile s con una espressione data da un binomio di primo grado in s. In antrambii casi si é scelto una funzione $\tilde{g}(t,s)$ dipendente dalla sola variabile s e si é esaminato, di conseguenza una equazione differenziale ordinaria a variabili separabili facilmente risolubile. Va notato che se la funzione $\tilde{f}(t,s)$, pur dipendendo dalla sola variabile s, non ha una espressione polinomiale di primo grado si puó sempre optare per scegliere la funzione $\tilde{g}(t,s)$ dipendente dalla sola variabile s. In tal caso peró si tratta di esaminare una equazione differenziale di tipo Riccati. Infine si noti che se $\tilde{f}(t,s)$ é una costante allora la funzione $\tilde{g}(t,s)$ verifica una equazione differenziale ordinaria a crescita quadratica nella funzione incognita.

In questo lavoro noi, pur essendo interessati ad esaminare l'equazione che determina $\tilde{g}(t,s)$, diamo per ipotesi l'esistenza della funzione cercata. Ci ripromettimo, in una seconda parte del lavoro che dovrá esaminare le funzioni di utilitá degli investitori, di esaminare la risolubilitá del problema.

Mediante il seguente risultato, inoltre, si stabilisce il legame tra i processi Y e Z e di conseguenza tra il processo Y ed il processo B_t^0

Theorem 2.6. *I processi Y e Z verificano la seguente relazione:*

$$Y_t + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \int_0^t Y_s ds + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \int_0^t \left[\int_0^s Y_u du \right] ds +$$

$$+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s \left[\int_0^u Y_v dv \right] du \right] ds = Z_t$$

Quindi, se si ha $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, risulta:

$$Y_t = \int_0^t \left[\frac{\lambda_1^2 (\lambda_3 - \lambda_2) e^{-\lambda_1(t-s)} - \lambda_2^2 (\lambda_3 - \lambda_1) e^{-\lambda_2(t-s)} + \lambda_3^2 (\lambda_2 - \lambda_1) e^{-\lambda_3(t-s)}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] dZ_s$$

Proof. La prima relazione si puó verificare nel modo seguente:

$$Y_t - Z_t = p_1 U_t^1 + p_2 U_t^2 + p_2 U_t^2 - \Bigg(p_1 B_t^1 + p_2 B_t^2 + p_3 B_t^3 + p_1 (\lambda_2 + \lambda_3) \int_0^t B_s^1 ds +$$

$$+p_2 (\lambda_1 + \lambda_3) \int_0^t B_s^2 ds + p_3 (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^t B_s^3 ds + p_1\lambda_2\lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s B_u^1 du \right] ds +$$

$$+p_2\lambda_1\lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s B_u^2 du \right] ds + p_3\lambda_1\lambda_2 \int_0^t \left[\int_0^s B_u^3 du \right] ds \Bigg) =$$

$$-p_1\lambda_1 \int_0^t U_s^1 ds - p_2\lambda_2 \int_0^t U_s^2 ds - p_3\lambda_3 \int_0^t U_s^3 ds - p_1 (\lambda_2 + \lambda_3) \int_0^t \left[U_s^1 + \lambda_1 \int_0^s U_u^1 du \right] ds -$$

$$p_2 (\lambda_1 + \lambda_3) \int_0^t \left[U_s^2 + \lambda_2 \int_0^s U_u^2 du \right] ds - p_3 (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^t \left[U_s^3 + \lambda_3 \int_0^s U_u^3 du \right] ds -$$

$$p_1\lambda_2\lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s \left[U_u^1 + \lambda_1 \int_0^u U_v^1 dv \right] du \right] ds - p_2\lambda_1\lambda_3 \int_0^t \left[\int_0^s \left[U_u^2 + \lambda_2 \int_0^u U_v^2 dv \right] du \right] ds -$$

$$p_3\lambda_1\lambda_2 \int_0^t \left[\int_0^s \left[U_u^3 + \lambda_3 \int_0^u U_v^3 dv \right] du \right] ds = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \int_0^t \left[p_1 U_s^1 + p_2 U_s^2 + p_3 U_s^3 \right] ds$$

$$-\left(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\right)\int_0^t\left[\int_0^s\left[p_1U_u^1+p_2U_u^2+p_3U_u^3\right]du\right]ds-$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\int_0^t\left[\int_0^s\left[\int_0^u\left[p_1U_v^1+p_2U_v^2+p_3U_v^3\right]dv\right]du\right]ds$$

Mettendo insieme primo e secondo membro si ottiene la tesi.

La seconda relazione si ricava dopo aver osservato che la relazione appena dimostrata rappresenta una equazione differenziale lineare del terzo ordine la cui funzione incognita, della variabile t, é data da:

$$t\longrightarrow\int_0^t\left[\int_0^s\left[\int_0^u Y_v dv\right]du\right]ds$$

La tesi si ottiene con calcoli standard utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie di Lagrange e osservando che il processo Y_t é la derivata terza della funzione incognita. □

Dal risultato appena ottenuto e dalla relazione che fornisce il legame tra il processo Z_t ed il moto browniano B_t^0 si ricava il seguente risultato.

Theorem 2.7. *Se si ha $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$, vale la seguente relazione:*

$$Y_t=\int_0^t\left[\frac{\lambda_1^2\left(\lambda_3-\lambda_2\right)e^{-\lambda_1(t-s)}-\lambda_2^2\left(\lambda_3-\lambda_1\right)e^{-\lambda_2(t-s)}+\lambda_3^2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)e^{-\lambda_3(t-s)}}{\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}\right]dB_s^0-$$

$$\int_0^t\left[\frac{\lambda_1^2\left(\lambda_3-\lambda_2\right)e^{-\lambda_1(t-s)}-\lambda_2^2\left(\lambda_3-\lambda_1\right)e^{-\lambda_2(t-s)}+\lambda_3^2\left(\lambda_2-\lambda_1\right)e^{-\lambda_3(t-s)}}{\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}\int_0^s\tilde{g}(s,w)dB_w^0\right]ds$$

BIBLIOGRAFIA

[Che03] P. Cheridito, Representation of Gaussian measures that are equivalent to Wiener measure, Sminaire de Probabilitis, XXXVII, Lecture Notes in Math., vol. 1382, Springer, Berlin, 2003, pp. 81-90.

[Hit68] Masuyuki Hitsuda, Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process, Osaka J. Math. 5 (1968), pp. 299-312.

[Gua06] Paolo Guasoni, Asymmetric information in fads models, Finance and Stochastics, 10 (2006), no. 2 pp. 159-177.

[RY99] D. Revuz - M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion. In: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol 293, 3rd edn. Berlin Heidelberg New York: Springer 1999

[SR13] Donato Scolozzi - Luigi Romano, Asimmetria informativa in un modello di mercato con n+1 moti browniani, Quaderno del Dipartimento di Scienze Economiche, Ottobre 2013, Universitá del Salento.